Quelques questions sur les courbes de Bézier

2 avril 2011

1 Questions

Question 1 *On se donne deux points distincts A et B, et un vecteur non nul $\overrightarrow{u}$. Existe-t-il une courbe de Bézier de degré 2 d'extrémités A et B, qui admette en A une tangente dirigée par le vecteur $\overrightarrow{u}$? Dans l'affirmative, est-elle unique ? Comment obtenir ses points de contrôle ?*

Réponse — On pose la question de l'existence et de l'unicité d'une telle courbe, et on demande de préciser ses points de contrôle.

Existence — S'il existe une telle courbe $\mathcal{C}$, notons P_0, P_1, P_2 ses points de contrôle. Nécessairement $P_0 = A$ et $P_2 = B$. D'après le Théorème **??**, le vecteur dérivé en $t = 0$ de l'arc paramétré $f : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ qui représente $\mathcal{C}$, est égal à :

$$f'(0) = 2\overrightarrow{P_0P_1},$$

donc la tangente à $\mathcal{C}$ en P_0 sera dirigée par $\overrightarrow{u}$ si et seulement si $\overrightarrow{P_0P_1}$ et $\overrightarrow{u}$ sont colinéaires.
Réciproquement, posons $P_0 = A$, $P_2 = B$, et définissons P_1 par $\overrightarrow{P_0P_1} = \lambda\overrightarrow{u}$ où λ est un réel quelconque différent de 0. Alors la courbe de Bézier $\mathcal{B}(P_0, P_1, P_2)$ de points de contrôles P_0, P_1, P_2 satisfait clairement aux conditions imposées.

Y-a-t-il unicité de la solution ? — Il y a clairement une infinité de solutions si l'on considère $\mathcal{C}$ comme un arc paramétré, c'est-à-dire comme la donnée de l'application de paramétrisation $f : [0,1] \to \mathbb{R}^2$, puisque le vecteur dérivé $f'(0)$ conviendra à partir du moment où il est égal à n'importe quel vecteur $\lambda\overrightarrow{u}$ colinéaire à $\overrightarrow{u}$ (avec $\lambda \neq 0$).
Si l'on considère $\mathcal{C}$ comme une "courbe géométrique", c'est-à-dire une classe d'équivalence d'arcs paramétrés $f : I \to \mathbb{R}^2$ de classes C^∞, où I désigne un segment de $\mathbb{R}$, pour la relation d'équivalence de changement de paramétrage (voir Section 2), la réponse doit être plus réfléchie. On sait en effet qu'une courbe géométrique possède une infinité de paramétrisations ! Mais ici la réponse est simple : il n'y a pas unicité des courbes géométriques de Bézier qui vérifient les conditions demandées, tout simplement parce que deux paramétrisations d'une même courbe géométrique ont nécessairement le même support, et que les courbes de Bézier $\mathcal{C}_1 = \mathcal{B}(P_0, P_1, P_2)$ et $\mathcal{C}_2 = \mathcal{B}(P_0, R, P_2)$, où :

$$\begin{cases} P_0 = A \\ P_2 = B \\ \overrightarrow{P_0P_1} = \overrightarrow{u} \\ \overrightarrow{P_0R} = -\overrightarrow{u}, \end{cases}$$

sont solutions du problème sans avoir le même support, celui de $\mathcal{C}_1$ étant inclus dans l'intérieur du triangle $P_0P_1P_2$, tandis que celui de $\mathcal{C}_2$ est inclus dans l'intérieur du triangle P_0RP_2, ces intérieurs se coupant suivant $[P_0P_2]$ puisque P_0 est le milieu de $[RP_1]$.

[0] [uarc0009] v1.00 /oral01 Site Web MegaMaths

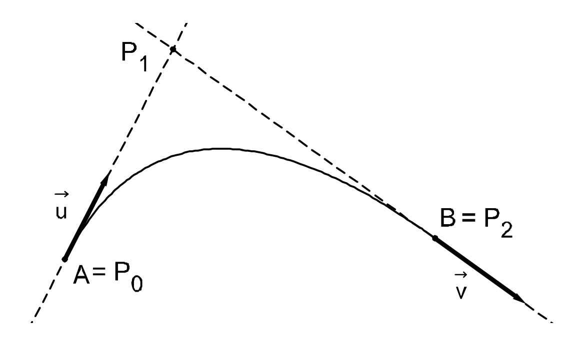


Figure 1: Quatre contraintes

Question 2 *On se donne deux points distincts A et B, et deux vecteurs non nuls $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$. Peut-on construire une courbe de Bézier de degré 2 d'extrémités A et B, qui admette respectivement pour tangentes en A et B les droites $A + \mathbb{R}\overrightarrow{u}$ et $B + \mathbb{R}\overrightarrow{v}$?*

Réponse — Une telle courbe $\mathcal{B}(P_0, P_1, P_2)$ paramétrée par $f : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ devrait vérifier les quatre conditions :

$$\begin{cases} P_0 = A \\ P_2 = B \\ f'(0) = 2\overrightarrow{P_0P_1} \in \mathbb{R}\overrightarrow{u} \\ f'(1) = 2\overrightarrow{P_1P_2} \in \mathbb{R}\overrightarrow{v}. \end{cases}$$

Ces conditions imposent à P_1 d'appartenir à la droite $D_A = A + \mathbb{R}\overrightarrow{u}$ et à la droite $D_B = B + \mathbb{R}\overrightarrow{v}$ (FIG. 1). Par conséquent :

- si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ ne sont pas colinéaires, il existe une unique courbe de Bézier de degré 2 qui remplisse ces conditions, et on sait construire ses points de contrôle.

- si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires, le problème n'a pas de solution.

Question 3 *Existe-t-il des paraboles passant par deux points distincts donnés et admettant en ces points des tangentes imposées ?*

Réponse — Oui puisqu'à la Question 2 on a construit une branche d'une parabole qui satisfait ces conditions.

Question 4 *On se donne deux points distincts A et B, et deux vecteurs non nuls $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$. Peut-on construire une courbe de Bézier de degré 3 d'extrémités A et B qui admette respectivement :*
(a) pour tangentes en A et B les droites $A + \mathbb{R}\overrightarrow{u}$ et $B + \mathbb{R}\overrightarrow{v}$?
(b) pour vecteurs dérivés lorsque le paramètre vaut 0 puis 1, les vecteur $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$?

Réponse — On recherche une courbe de Bézier $\mathcal{C} = \mathcal{B}(P_0, P_1, P_2, P_3)$ qui vérifie les conditions (a) ou (b). Compte tenu des propriétés des courbes de Bézier (voir [1]) :

$$\text{(a)} \Leftrightarrow \begin{cases} P_0 = A \\ P_3 = B \\ f'(0) = 3\overrightarrow{P_0P_1} \in \mathbb{R}\overrightarrow{u} \\ f'(1) = 3\overrightarrow{P_1P_2} \in \mathbb{R}\overrightarrow{v} \end{cases} \quad \text{et} \quad \text{(b)} \Leftrightarrow \begin{cases} P_0 = A \\ P_3 = B \\ f'(0) = 3\overrightarrow{P_0P_1} = \overrightarrow{u} \\ f'(1) = 3\overrightarrow{P_1P_2} = \overrightarrow{v} \end{cases}$$

où $f : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ représente la paramétrisation classique de $\mathcal{C}$. On constate qu'il est toujours facile de trouver des points P_0, P_1, P_2, P_3 solutions de ces systèmes, donc la réponse est affirmative dans les deux cas.

Remarque — A la différence de la Question 2, la courbe de Bézier de degré 3 vérifiant les quatre conditions données existent toujours, même quand $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires, parce que le degré 3 autorise les points d'inflexion.

Question 5 *On souhaite tracer une courbe de classe C^1 à plusieurs courbures qui passe par certains points et y admette certaines tangentes en ces points. Une bonne solution consiste à raccorder des courbes de Bézier de degré 3. Dites-nous comment procéder ?*

Réponse — Il ne suffit pas de joindre les courbes bout à bout, ce qui donnerait seulement une courbe continue. Pour obtenir une courbe de classe C^1, il faut que le dernier segment $[P_2P_3]$ du polygone de Bézier (P_0, P_1, P_2, P_3) de la première courbe et le premier segment $[Q_0Q_1]$ du polygone (Q_0, Q_1, Q_2, Q_3) de la seconde courbe vérifient :

$$P_3 = Q_0 \quad \text{et} \quad \overrightarrow{P_2P_3} = \overrightarrow{Q_0Q_1}.$$

En effet :

- Avoir $P_3 = Q_0$ permet d'obtenir une courbe continue.

- D'après les propriétés des courbes de Bézier (voir [1]), le vecteur dérivée en $t = 1$ de la première courbe est $\overrightarrow{v} = 3\overrightarrow{P_2P_3}$, tandis que le vecteur dérivée en $t = 0$ de la seconde courbe est $\overrightarrow{w} = 3\overrightarrow{Q_0Q_1}$. Si l'on suppose que $\overrightarrow{P_2P_3} = \overrightarrow{Q_0Q_1}$, on est assuré d'avoir $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{w}$.

Posons $\overrightarrow{v} = (\alpha, \beta)$. En mettant les arcs $\mathcal{B}(P_0, P_1, P_2, P_3)$ et $\mathcal{B}(Q_0, Q_1, Q_2, Q_3)$ bout à bout, on obtient une nouvelle paramétrisation :

$$t \mapsto M(t) = (x(t), y(t))$$

qui peut être imaginée pour t variant de 0 à 2, avec $M(1) = P_3 = Q_0$. Les fonctions composantes $x(t)$ et $y(t)$ sont des fonctions continues sur $[0, 2]$, dérivables sur $[0, 1[$ et sur $]1, 2]$, et les fonctions $x'(t)$ et $y'(t)$ admettent des limites quand t tend vers 1. L'égalité $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{w}$ impose en effet d'avoir $\lim_{t\to1_-} x'(t) = \alpha = \lim_{t\to1_+} x'(t)$ et $\lim_{t\to1_-} y'(t) = \beta = \lim_{t\to1_+} y'(t)$.
Un Théorème classique d'analyse ([2], Th. 192) montre alors que $x(t)$ et $y(t)$ sont dérivables sur $[0, 2]$, que $x'(1) = \alpha$ et $y'(1) = \beta$.

Question 6 *Soient a, b deux réels tels que $a < b$. Soient α, β deux réels strictement positifs. Pouvez-vous construire une application f de classe C^1 de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que :*
- *f vaut 1 sur $[a, b]$ et 0 sur le complémentaire de $]a - \alpha, b + \beta[$;*
- *$f(a - \alpha/2) = f(b + \beta/2) = 1/2$;*
- *Sur chacun des intervalles fermés $[a - \alpha, a - \alpha/2]$, $[a - \alpha/2, a]$, $[b, b + \beta/2]$, $[b + \beta/2, b + \beta]$, le graphe de f est un arc de parabole ;*
- *La courbe de f admet des tangentes horizontales en $a - \alpha$, a, b et $b + \beta$?*

Réponse — La FIG. 2 donne l'allure de la courbe.

(1) Entre $a - \alpha$ et $a - \alpha/2$, f doit être une fonction du second degré qui s'annule en $a - \alpha$, admet une tangente horizontale en 0, et vaut $1/2$ en $a - \alpha/2$. Les deux premières contraintes sont satisfaites par la fonction :

$$f(x) = \frac{(x - a + \alpha)^2}{k},$$

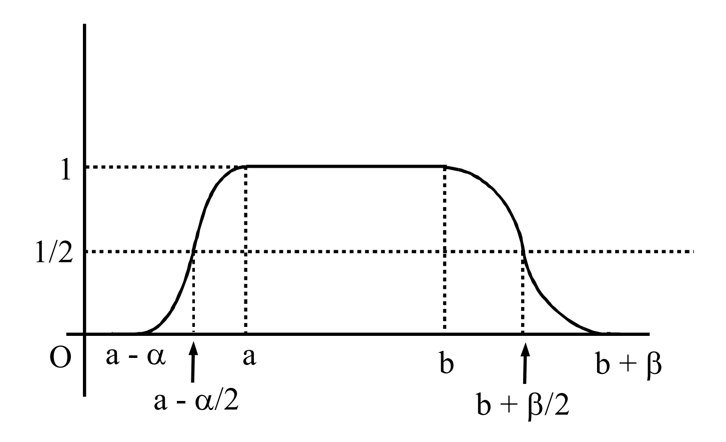


Figure 2: Intervalle flou "à côtés paraboliques"

et l'on détermine k en écrivant :

$$f\left(a-\frac{\alpha}{2}\right)=\frac{1}{2}$$

ce qui donne $k=\alpha^2/2$ et :

$$f(x)=\frac{2(x-a+\alpha)^2}{\alpha^2}.$$

(2) Entre $a-\alpha/2$ et a, f sera une fonction du second degré qui vaut 1 en a, admet une tangente horizontale en 1, et vaut 1/2 en $a-\alpha/2$. Les deux premières contraintes sont satisfaites par :

$$f(x)=1+\frac{(x-a)^2}{k},$$

et k est déterminé par la troisième contrainte. On obtient $k=-\alpha^2/2$ et :

$$f(x)=1-\frac{2(x-a)^2}{\alpha^2}.$$

On constate que l'application f sera bien de classe C^1 sur $[a-\alpha,a]$ puisque l'on vérifie que $f'(a-\alpha/2)=g'(a-\alpha/2)$. L'application f que l'on est en train de construire sera donc de classe C^1 sur tout $\mathbb{R}$.

(3) Entre b et $b+\beta/2$, f sera une fonction du second degré qui vaut 1 en b, admet une tangente horizontale en b, et vaut 1/2 en $b+\beta/2$. Tous calculs faits, on obtient :

$$f(x)=1-\frac{2(x-b)^2}{\beta^2}.$$

sur $[b,b+\beta/2]$.

(4) Entre $b+\beta/2$ et $b+\beta$, f sera une fonction du second degré qui vaut 0 en $b+\beta$, admet une tangente horizontale en $b+\beta$, et vaut 1/2 en $b+\beta/2$. Tous calculs faits, on obtient :

$$f(x)=\frac{2(x-b-\beta)^2}{\beta^2}.$$

sur $[b+\beta/2,b+\beta]$.

Finalement :

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [a,b] \\ 0 & \text{si } x < a-\alpha \text{ ou } x > b+\beta \\ 2(x-a+\alpha)^2/\alpha^2 & \text{si } x \in [a-\alpha, a-\alpha/2[\\ 1-2(x-a)^2/\alpha^2 & \text{si } x \in [a-\alpha/2, a[\\ 1-2(x-b)^2/\beta^2 & \text{si } x \in]b, b+\beta/2] \\ 2(x-b-\beta)^2/\beta^2 & \text{si } x \in]b+\beta/2, b+\beta] \end{cases}$$

répond à la question.

2 Rappels concernant les courbes géométriques

Une courbe géométrique (ou arc géométrique) de classe C^∞ est, en toute rigueur, une classe d'équivalence d'arcs paramétrés $f : I \to \mathbb{R}^2$ de classes C^∞, où I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$, pour une relation d'équivalence $\mathcal{R}$ que nous allons préciser.
Pour simplifier, limitons-nous au cas des arcs paramétrés de classe C^∞ (l'adaptation étant facile si l'on désire travailler avec des fonctions de classe C^k), et notons (I, f) l'arc paramétré $f : I \to \mathbb{R}^2$ où I est un intervalle de $\mathbb{R}$. On a alors tout un jeu de définitions classiques suivantes [3] :
On dit que deux arcs (I, f) et (J, g) sont en relation $\mathcal{R}$ s'il existe un C^∞-difféomorphisme $\theta : J \to I$ tel que $g = f \circ \theta$. Les classes d'équivalence obtenues avec cette relation sont appelées des *courbes géométriques* (ou des *arcs géométriques*) de classe C^∞.
Si $\mathcal{C}$ est la classe de (I, f), on dit que (I, f) est une *paramétrisation* de $\mathcal{C}$ (on parle aussi de *paramétrage admissible*). Une courbe géométrique admet donc plusieurs paramétrisations. Par définition, on appelle support d'une courbe géométrique le support de l'une quelconque de ses paramétrisations.
Un point géométrique d'une courbe géométrique $\mathcal{C}$ est, par définition, une classe d'équivalence de triplets (I, f, t) où (I, f) est une paramétrisation de $\mathcal{C}$ et $t \in I$, pour la relation d'équivalence suivante :

$$(I, f, t)\, \mathcal{R}_p\, (J, g, u) \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} \exists \theta : J \overset{C^\infty}{\to} I \quad g = f \circ \theta \\ t = \theta(u). \end{cases}$$

De cette façon, le "point" sur la courbe géométrique $\mathcal{C}$ est "atteint" indifféremment par $f(t)$ ou $g(u)$ suivant la paramétrisation que l'on utilise et quand on parle de point de paramètre t, cela sous-entend que l'on a choisi une paramétrisation de $\mathcal{C}$.
Si $(I, f)\mathcal{R}(J, g)$, c'est-à-dire si $f : I \to \mathbb{R}^2$ et $g : J \to \mathbb{R}^2$ définissent la même courbe géométrique, on dispose du difféomorphisme $\theta : J \to I$ tel que $g = f \circ \theta$, et par dérivation d'une fonctions composée :

$$g'(t) = f'(\theta(t))\theta'(t)$$

de sorte que les vecteurs $f'(\theta(t))$ et $g'(t)$ soient toujours colinéaires, et dirigent tous deux la même droite (s'ils ne sont pas nuls). Cela permet de définir sereinement la tangente géométrique à la courbe $\mathcal{C}$ en un point géométrique de cette courbe.
Pour plus de renseignements sur les courbes géométriques, les points géométriques et les variétés affines fondamentales d'une courbe géométrique $\mathcal{C}$ en un point (qui généralisent la définition d'une tangente géométrique que l'on vient de donner), le lecteur pourra se référer à la Section 1.2 du livre de E.Ramis, C. Deschamps, J. Odoux [3].

3 Segment de Bézier de degré 3 sur un arc de parabole

Exercice 1 *Soit $\mathcal{P}$ une parabole. Soit $\mathcal{C}$ un arc de la parabole $\mathcal{P}$ d'extrémités A et B ($A \neq B$). Montrer qu'il existe un segment de Bézier de degré 3 d'extrémités A et B qui se superpose exactement sur $\mathcal{C}$.*

Solution — On peut toujours se placer dans un repère affine $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ où la parabole $\mathcal{P}$ admet l'équation $y = x^2$. Dans ce repère, notons (x_A, y_A) et (x_B, y_B) les coordonnées de A et B, et $\mathcal{C}$ l'arc de la parabole $\mathcal{P}$ d'extrémités A et B. On a $y_A = x_A^2$ et $y_B = x_B^2$.
Une courbe de Bézier $\mathcal{B}$ de degré 3 de points de contrôles $P_0(x_0, y_0)$, $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$, $P_3(x_3, y_3)$ est définie par les équations paramétriques :

$$(S) \quad \begin{cases} x(t) = (1-t)^3 x_0 + 3t(1-t)^2 x_1 + 3t^2(1-t)x_2 + t^3 x_3 \\ y(t) = (1-t)^3 y_0 + 3t(1-t)^2 y_1 + 3t^2(1-t)y_2 + t^3 y_3 \end{cases}$$

pour $t \in [0,1]$. On sait d'après le cours ([1], leçon d'oral du CAPES sur les courbes de Bézier) que :
- $\mathcal{B}$ est d'extrémités P_0 et P_3 ;
- (P_0P_1) est la tangente à $\mathcal{B}$ en P_0 ;
- (P_2P_3) est la tangente à $\mathcal{B}$ en P_3.

Prenons donc $P_0(x_0, y_0) = A(x_A, y_A)$, $P_3(x_3, y_3) = B(x_B, y_B)$. La tangente à $\mathcal{P}$ issue de A admet l'équation :

$$y = 2x_A(x - x_A) + y_A = 2x_A x - x_A^2,$$

et P_1 appartient à cette tangente, donc $y_1 = 2x_A x_1 - x_A^2$.
De même la tangente à $\mathcal{P}$ issue de B admet l'équation $y = 2x_B x - x_B^2$, et P_2 appartient à cette tangente, donc $y_2 = 2x_B x_2 - x_B^2$.
La courbe $\mathcal{B}$ se superposera sur $\mathcal{C}$ si l'on a $y(t) = x(t)^2$ quel que soit $t \in [0,1]$. Pour avoir des chances d'obtenir l'égalité $y(t) = x(t)^2$ pour tout t, il faut annuler les coefficients des monômes en t^2 et t^3 dans $x(t)$, et donc avoir :

$$\begin{cases} -x_0 + 3x_1 - 3x_2 + x_3 = 0 & \text{(coefficient de } t^3) \\ 3x_0 - 6x_1 + 3x_2 = 0 & \text{(coefficient de } t^2) \end{cases}$$

soit :

$$\begin{cases} 3x_1 - 3x_2 = x_A - x_B \\ 2x_1 - x_2 = x_A. \end{cases}$$

En résolvant ce système, on obtient :

$$x_1 = \frac{2x_A + x_B}{3} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{x_A + 2x_B}{3}.$$

Par suite :

$$y_1 = 2x_A x_1 - x_A^2 = 2x_A \frac{2x_A + x_B}{3} - x_A^2 = \frac{x_A(x_A + 2x_B)}{3}$$

et :

$$y_2 = 2x_B x_2 - x_B^2 = 2x_B \frac{x_A + 2x_B}{3} - x_B^2 = \frac{x_B(2x_A + x_B)}{3}.$$

En remplaçant dans (S), on obtient :

$$\begin{cases} x(t) = (1-t)^3 x_A + t(1-t)^2(2x_A + x_B) + t^2(1-t)(x_A + 2x_B) + t^3 x_B \\ y(t) = (1-t)^3 x_A^2 + t(1-t)^2 x_A(x_A + 2x_B) + t^2(1-t)x_B(2x_A + x_B) + t^3 x_B^2. \end{cases}$$

Il s'agit de vérifier que :

$$\forall t \in [0,1] \quad y(t) - x(t)^2 = 0.$$

La fonction $P(t) = y(t) - x(t)^2$ est polynomiale en t, de degré au plus 3. Mais les coefficients ont été choisis pour que $\deg x(t) \leq 1$, et $\deg y(t) \leq 2$ puisque le coefficient du terme en t^3 dans $y(t)$ est :

$$-x_A^2 + x_A(x_A + 2x_B) - x_B(2x_A + x_B) + x_B^2 = 0.$$

Donc $\deg P(t) \leq 2$, et $P(t)$ sera identiquement nul s'il possède au moins trois racines. C'est le cas puisqu'on vérifie facilement que :

$$P(0) = P(1) = P\left(\frac{1}{2}\right) = 0.$$

References

[1] D.-J. Mercier, Oral 1 du CAPES Maths - Plans, développements et compléments, Vol. I, Publibook, à paraître. *Information au 2 avril 2011 : en attendant la parution de ce livre, on pourra retrouver le cours sur les courbes de Bézier dans le fascicule "Courbes de Bézier - Oral 1 du CAPES externe" proposé sur www.lulu.com.*

[2] D.-J. Mercier, L'épreuve d'exposé au CAPES mathématiques, Leçons rédigées et commentées, Vol. II, Publibook, 2006.

[3] E. Ramis, C. Deschamps, J. Odoux, Cours de Mathématiques Spéciales, Volume **5**, Applications de l'Analyse à la Géométrie, Masson, 1989.